Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ, ЯКІ МІСТЯТЬ ЦІЛУ ЧАСТИНУ *X*

Дніпро

2019

Розглянуто властивості функції ціла частина x, а також методи розв'язання рівнянь, які містять $[x]$, та задачі, що зводяться до таких рівнянь. Матеріали посібника можуть бути використані для підготовки фахівців за спеціальностями «Математика» і «Середня освіта (математика)», на уроках і факультативних заняттях з алгебри і початків аналізу в старших класах загальноосвітніх закладів, під час підготовки учнів до математичних олімпіад.

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 5 від 22 січня 2019 р.)

Рецензенти:

А. В. Тушев, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

Б. Г. Пелешенко, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Дніпровського державного аграрно-економічного університету.

Методичні вказівки
до розв'язання рівнянь,
які містять цілу частину x

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Р. О. Біліченко,
канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук,
асистент С. В. Конарева.

© Біліченко Р. О., Вакарчук М. Б., Конарева С. В., 2019

1. Функції ціла і дробова частина числа та їхні властивості

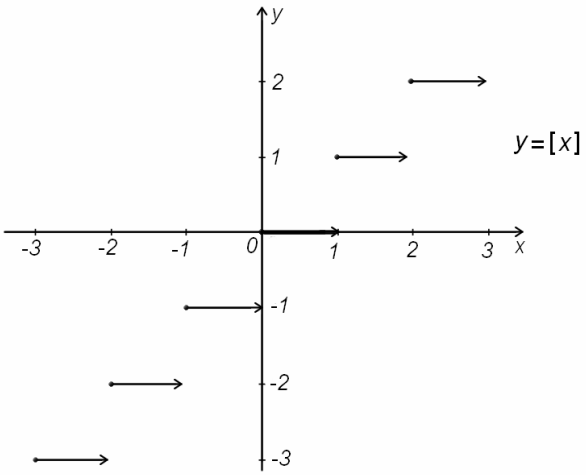
Означення. Цілою частиною дійсного числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Цілу частину числа x позначають символом $[x]$, де $x = n + q, n \in \mathbf{Z},\ 0 \le q < 1$. Наприклад, $[-2{,}1] = -3$, $[-4] = -4$, $[0{,}9] = 0$, $[\pi] = 3$.

Означення. Формула $y = [x]$ визначає функцію, яку називають цілою частиною x або антьє від x (від французького *entier* − цілий).

Властивості функції $y = [x]$:

1. Областю визначення є множина всіх дійсних чисел: $D([x]) = \mathbf{R}$.
2. Областю значень є множина всіх цілих чисел: $E([x]) = \mathbf{Z}$.
3. Функція $y = [x]$ не є ні парною, ні непарною.
4. Неперіодична.
5. Необмежена.
6. Функція не є неперервною. Точки $x \in \mathbf{Z}$ є точками розриву першого роду. У кожній з них функція є неперервною справа.
7. Функція $[x]=0$ для всіх $x \in [0, 1)$.
8. Функція $y = [x]$ є кусково-сталою і не має точок екстремуму.
9. Графік функції складається зі сходинок і утворює певні «сходи», що йдуть зліва направо та знизу вверх (мал.1).



Мал. 1

Означення. Дробовою частиною дійсного числа x називається різниця між цим числом та його цілою частиною.

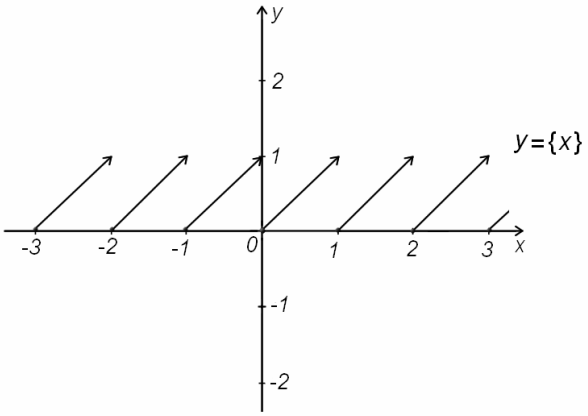
Дробову частину числа x позначають символом $\{x\}$. За означенням $\{x\} = x - [x]$. Наприклад, $\{-3{,}2\} = 0{,}8$, $\{-2\} = 0$, $\{0{,}7\} = 0{,}7$.

Означення. Формула $y = \{x\}$ визначає функцію, яку називають дробовою частиною x.

Властивості функції $y = \{x\}$:

1. Областю визначення є множина всіх дійсних чисел: $D(\{x\}) = \mathbf{R}$.
2. Область значень: $E(\{x\}) = [0, 1)$.
3. Функція $y = \{x\}$ не є ні парною, ні непарною.
4. Періодична з найменшим додатним періодом $T = 1$.

5. Обмежена та додатна.
6. Функція не є неперервною. Точки $x \in \mathbf{Z}$ є точками розриву першого роду. У кожній з них функція неперервна справа.
7. Функція $\{x\}=0$ для всіх $x \in \mathbf{Z}$.
8. Функція $y = \{x\}$ строго зростає на інтервалі $[n, n+1)$, де $n \in \mathbf{Z}$, і не має точок екстремуму.
9. Графік функції $y = \{x\}$ зображено на малюнку 2.



Мал. 2

Завдання 1. Побудуйте графіки функцій:

1. $y = \dfrac{1}{[x]}$,
2. $y = \sqrt{[x]}$,
3. $y = \sqrt{\{x\}}$,
4. $y = [x] - \{x\}$,
5. $y = (x - [x])^2$,
6. $y = [x] - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$,
7. $y = |[x]|$,
8. $y = |\{x\}|$
9. $y = \{[x]\}$,
10. $y = [\{x\}]$.

Завдання 2. На площині xOy побудуйте геометричне місце точок, координати яких задовольняють умовам:

1. $[x] = [y]$,
2. $\{x\} = \{y\}$,
3. $[x + y] = [x] + [y]$,
4. $[x^2 + y^2] = 1$.

Розглянемо далі ще деякі властивості цілої та дробової частин числа:

Властивість 1. $[x] \le x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Властивість 2. $[x] + 1 > x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Властивість 3. $x = [x] + \{x\}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Властивість 4. $[x + n] = [x] + n$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

Властивості 1−4 безпосередньо випливають із означення цілої частини числа.

Властивість 5. $[x + y] \ge [x] + [y]$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

Доведення. Із властивості 3 $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$. Тоді

$$x + y = [x] + \{x\} + [y] + \{y\} = [x] + [y] + \{x\} + \{y\} = [x] + [y] + q,$$

де $q = \{x\} + \{y\}$. Зрозуміло, що $0 \le q < 2$. Розглянемо два випадки:

1) якщо $0 \le q < 1$, то $[x+y]=[x]+[y]$,

2) якщо $1 \le q < 2$, тобто $q = 1+\alpha$, де $0 \le \alpha < 1$, то $x+y=[x]+[y]+1+\alpha$. Звідси

$$[x+y]=[x]+[y]+1>[x]+[y].$$

Властивість 6. $[x_1+x_2+...+x_n] \ge [x_1]+[x_2]+...+[x_n],\ \forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$.

Властивість 6 можна довести із властивості 5 із застосуванням методу математичної індукції.

Властивість 7. Якщо $[x]=[y]$, то $|x-y|<1$.

Властивість 8. $[x]+[-x]=0, \forall x \in \mathbf{Z}$.

$[x]+[-x]=-1,\ \forall x \notin \mathbf{Z}$.

Властивість 9. $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right],\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Властивість 10. $\{x+n\}=\{x\},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{Z}$.

Властивість 11. $\{n\{x\}\}=\{nx\},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Властивість 12. Якщо $\{x\}+\{y\}<1$, то $\{x+y\}=\{x\}+\{y\}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Якщо $\{x\}+\{y\} \ge 1$, то $\{x+y\}=\{x\}+\{y\}-1, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

Завдання 3. Доведіть самостійно властивості 6−7.

2. Методи розв'язання рівнянь, які містять [*x*] та {*x*}

2.1. Графічні методи

Розглянемо рівняння

$$f(x)=[g(x)], \tag{1}$$

Будуємо в координатній площині xOy графіки функцій $y=f(x)$ та $y=[g(x)]$. Графіком функції $y=[g(x)]$ є сукупність проекцій на прямі $y=n$ ділянок графіка $y=g(x)$, які знаходяться в смугах $n \le y < n+1$, де $n \in \mathbf{Z}$. Суть графічного метода полягає в тому, що розв'язком рівняння (1) є абсциси спільних точок $M(x_0, y_0)$ графіків функцій $y=f(x)$ та $y=[g(x)]$. Спочатку знаходимо ординати y_0 точок M з урахуванням того, що вони завжди цілі. Потім із рівняння $f(x_0)=y_0$ знаходимо абсциси x_0 точок M.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^3-[x]=3$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

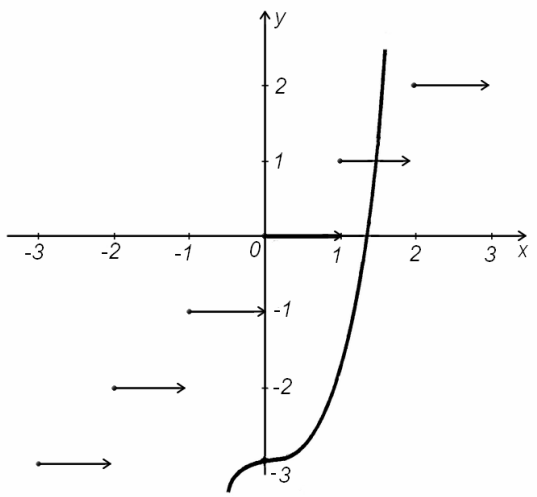
$$x^3-3=[x]$$

і побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y=x^3-3$ та $y=[x]$ (мал. 3). Бачимо, що на проміжку [1, 2) вони мають єдину спільну точку. Але для $x \in$ [1, 2) значення $[x]=1$. Тоді

$$x^3-3=1.$$

Розв'язком рівняння є $x=\sqrt[3]{4}$.

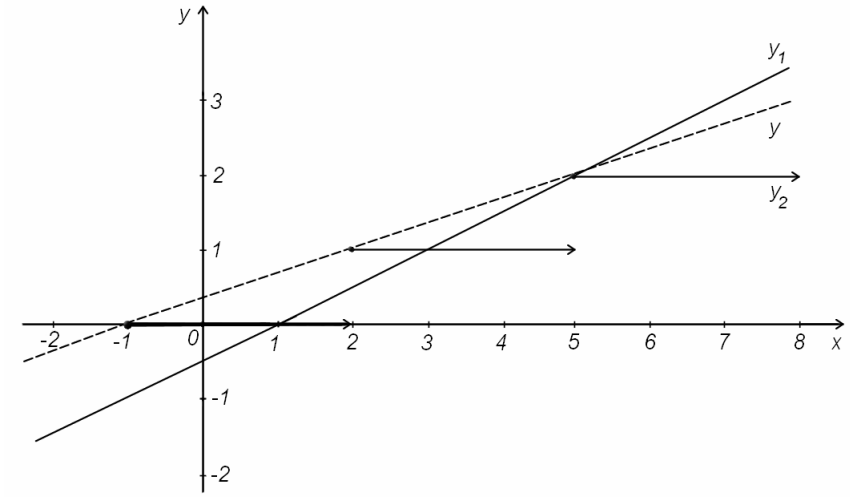
Відповідь: $x=\sqrt[3]{4}$.



Мал. 3

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$.

Розв'язання. Будуємо в одній системі координат графіки функцій (мал. 4) $y_1=\frac{x-1}{2}$ та $y=\frac{x+1}{3}$ (графік цієї функції позначено на малюнку пунктиром).



Мал. 4

Для побудови графіка $y_2=\left[\frac{x+1}{3}\right]$ проектуємо на прямі $y=n$ ділянки графіка $y=\frac{x+1}{3}$, які знаходяться в смугах $n\le y<n+1$, де $n\in\mathbf{Z}$. На малюнку бачимо, що спільні точки графіків функцій y_1 та y_2 знаходяться на проміжках [−1, 2), [2, 5), [5, 8). Для $x\in[-1,\ 2)$ значення $y_2=0$. Із рівняння $\frac{x-1}{2}=0$ знаходимо $x_1=1$. Для $x\in[2,\ 5)$ значення $y_2=1$. Із рівняння $\frac{x-1}{2}=1$ знаходимо $x_2=3$. Для $x\in[5,\ 8)$ значення $y_2=2$. Із рівняння $\frac{x-1}{2}=2$ знаходимо $x_3=5$.

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=5$.

Завдання 4. Розв'язати рівняння:

1. $[x] = 2\{x\}$,
2. $0{,}5[x] = \dfrac{1}{x}$,
3. $x + \{x\} = 1$,
4. $2x = [x] + 1$,
5. $2x = \{x\} + 1$,
6. $\left[\dfrac{x+3}{3}\right] = \dfrac{x-1}{2}$.

Слід відзначити, що точність розв'язання рівняння (1) графічним методом визначається точністю розв'язків рівнянь $f(x) = n$, де n − деякі цілі числа. Однак точні розв'язки цих рівнянь можна отримати не завжди. Проте в багатьох випадках саме графічний метод без значних труднощів дозволяє вирішувати деякі загальні питання щодо коренів рівняння (1), а саме їхньої кількості або розташування на певному проміжку.

Приклад 3. Скільки розв'язків має рівняння $x^2 - x + [x] - 0{,}5 = 0$?

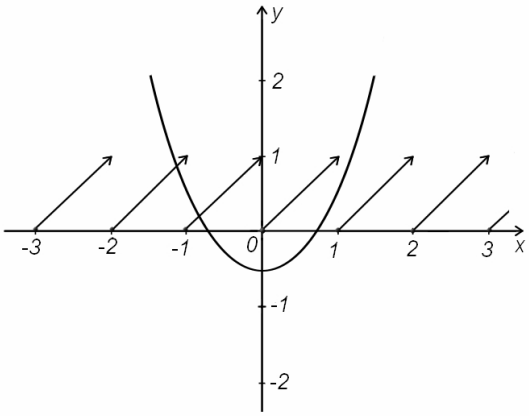
Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$x^2 - 0{,}5 = x - [x]$$

або

$$x^2 - 0{,}5 = \{x\}.$$

Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x^2 - 0{,}5$ і $y = \{x\}$ (мал. 5).



Мал. 5

На малюнку бачимо, що спільні точки графіків функцій знаходяться на проміжках [−2, −1), [−1, 0). Таким чином, рівняння має два розв'язки.

Відповідь: два розв'язки.

Завдання 5. Скільки розв'язків має рівняння?

1. $x^4 - 100x + 100[x] = 0$,
2. $2 + 3[x] = 4x$,
3. $x^2 - 8[x] + 7 = 0$,
4. $x[x] - [x] - 1 = 0$.

2.2. Аналітичні методи

2.2.1. Метод заміни змінної

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\left[\frac{2x+1}{7}\right]=\frac{4x-26}{8}$.

Розв'язання. Припустимо, що $\frac{4x-26}{8}=t$ – ціле число. Тоді $x=\frac{4t+13}{2}$ і рівняння набуває вигляду

$$\left[\frac{4t+14}{7}\right]=t.$$

Через те, що $0\le x-[x]<1$, маємо

$$0\le\frac{4t+14}{7}-t<1.$$

Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо

$$0\le -3t+14<7,$$

$$2\frac{1}{3}<t\le 4\frac{2}{3}.$$

Оскільки t – ціле число, то воно може бути рівним або 3, або 4.

При t = 3 отримаємо: $x_1 = 25/2 = 12{,}5$.

При t = 4 отримаємо: $x_2 = 29/2 = 14{,}5$.

Відповідь: рівняння має два корені: $x_1 = 12{,}5$ і $x_2 = 14{,}5$.

Приклад 5. Розв'язати задачу: Турист іде зі швидкістю 5 км/год, зупиняючись на відпочинок кожні 4 км. Кожна зупинка, окрім четвертої, триває 10 хв; четверта зупинка триває 1 год. Яку відстань пройде турист, якщо в дорозі він був 8 годин?

Розв'язання. Позначимо через x відстань, що пройшов турист. Тоді $\left[\frac{x}{4}\right]$ – кількість зроблених ним зупинок; $\frac{x}{5}$ – час, за який би турист пройшов увесь шлях, не зупиняючись і рухаючись зі швидкістю 5 км/год; $\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)\frac{1}{6}$ – час, витрачений на десятихвилинні зупинки. Маємо таке рівняння:

$$\frac{x}{5}+1+\left(\left[\frac{x}{4}\right]-1\right)\frac{1}{6}=8.$$

Розв'язуючи його відносно $\left[\frac{x}{4}\right]$, отримаємо

$$\left[\frac{x}{4}\right]=\frac{215-6x}{5}.$$

Нехай $\frac{215-6x}{5}=t$. Тоді $x=\frac{215-5t}{6}$, тому $\left[\frac{215-5t}{24}\right]=t$. Маємо нерівність

$$0\le\frac{215-5t}{24}-t<1,$$

звідки знаходимо, що $6\frac{17}{29}<t\le 7\frac{12}{29}$.

Отже, $t = 7$, тоді $x = 30$.

Відповідь: турист пройшов шлях 30 км.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{1}{\{x\}}+\frac{1}{[x]}=\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $[x]+\{x\}=x$, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{\{x\}}+\frac{1}{[x]}=\frac{1}{\{x\}+[x]}.$$

Зробивши заміну $\{x\}=a$, $[x]=b$, маємо

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}\quad\Leftrightarrow\quad(a+b)^2=ab\ \ (a\ne 0,b\ne 0)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+1=0.$$

Отримане квадратне рівняння (відносно $\frac{a}{b}$) не має розв'язків.

Відповідь: розв'язків немає.

Завдання 6. Розв'язати рівняння:

1. $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$,
2. $\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11}$,
3. $2+3[x]=4x$,
4. $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x]$.
5. Розв'язати задачу: Майстер видав швачкам на початку зміни тканину по 200 грн. за метр. Пошив одного костюму коштує 350 грн. Після зміни він отримав зшитих костюмів разом із тканиною, що залишилася, на 3750 грн. Який залишок тканини отримав майстер, якщо відомо, що він видав ціле число метрів тканини та на один костюм витрачається 1,8 м ?

2.2.2. Метод розкладання на множники

Приклад 7. Розв'язати рівняння $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння:

$$[x]+\frac{1}{[x]}-\{x\}-\frac{1}{\{x\}}=0,$$

$$[x]-\{x\}+\frac{\{x\}-[x]}{[x]\{x\}}=0,\quad [x]\neq 0,\ \{x\}\neq 0,$$

$$([x]-\{x\})\left(1-\frac{1}{[x]\{x\}}\right)=0.$$

Оскільки $[x]\neq 0,\ \{x\}\neq 0$, отримане рівняння рівносильне рівнянню:

$$1-\frac{1}{[x]\{x\}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad [x]\{x\}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad [x]\{x\}=1.$$

З останнього рівняння випливає, що $[x]>0$, оскільки дробова частина числа x більше 0.

Отже, $x>0$. Нехай $[x]=n$ ($n\in\mathbf{N}$), тоді при $n>1$, $\{x\}=\frac{1}{n}$. За означенням цілої частини числа $[x]+\{x\}=x$, тоді, $x_n=n+\frac{1}{n}$, ($n\in\mathbf{N},\ \ n>1$).

Відповідь: $x_n=n+\frac{1}{n}$, ($n\in\mathbf{N},\ \ n>1$).

Завдання 7. Розв'язати рівняння:

$$x+\frac{92}{x}=[x]+\frac{92}{[x]}$$

2.2.3. Метод зведення рівняння до системи з цілим параметром

Метод полягає у заміні рівняння (1) мішаною системою

$$\begin{cases}[g(x)]=k\\ k\le g(x)<k+1\\ f(x)=k\end{cases}$$

з цілим параметром k.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\left[\frac{x+3}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$.

Розв'язання. Якщо $k\le\frac{x+3}{3}<k+1$, то $\left[\frac{x+3}{3}\right]=k$ і $\frac{x-1}{2}=k$. Тому розв'язування рівняння зводиться до розв'язування мішаної системи

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x+3}{3}\right] = k \\ k \le \dfrac{x+3}{3} < k+1 \\ \dfrac{x-1}{2} = k \end{cases}$$

з цілим параметром k. Знайдемо ті значення параметра, за яких система сумісна. Для цього з останнього рівняння системи виразимо x через k і підставимо його у подвійну нерівність:

$$k \le \frac{2(k+1)+3}{3} < k+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3k \le 2k+4, \\ 2k+4 < 3k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \le 4, \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow k = 2, 3, 4.$$

Отже, мішана система сумісна за умови, що $k = 2$, 3, 4 і її розв'язками є відповідні значення змінної x: 5, 7, 9, які отримуємо з останнього рівняння системи.

Відповідь: $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 9$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\left[\dfrac{x-3}{2}\right] = \left[\dfrac{x-2}{3}\right]$.

Розв'язання. Замінюємо рівняння системою:

$$\begin{cases} k \le \dfrac{x-3}{2} < k+1 \\ k \le \dfrac{x-2}{2} < k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+3 \le x < 2k+5 \\ 3k+2 \le x < 3k+5, \end{cases}$$

де $k = \left[\dfrac{x-3}{2}\right] = \left[\dfrac{x-2}{3}\right]$. Для сумісності цієї системи необхідно, щоб виконувались умови $2k+3 < 3k+5$ і $3k+2 < 2k+5$. Із них знаходимо, що $k = -1$, 0, 1, 2. Розв'язуючи наведену вище систему при цих значеннях параметра k, одержимо, що $x \in [1;2) \cup [3;7) \cup [8;9)$.

Відповідь: $x \in [1;2) \cup [3;7) \cup [8;9)$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $[20x] + 23[x] = 2023$.

Розв'язання. Замінюємо рівняння системою

$$\begin{cases} [x] = k \\ k \le x < k+1 \\ [20x] + 23k = 2023 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \le x < k+1 \\ [20x] = 2023 - 23k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20k \le 20x < 20k+20 \\ 2023 - 23k \le 20x < 2024 - 23k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20k < 2024 - 23k \\ 2023 - 23k < 20k + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 43k < 2024 \\ 43k > 2003 \end{cases} \Rightarrow k = 47.$$

Підставивши знайдене $k = 47$ у третю систему ланцюжка перетворень, одержимо

$$47\frac{1}{10} \le x < 47\frac{3}{20}.$$

Відповідь: $x \in \left[47\frac{1}{10}; 47\frac{3}{20}\right)$.

Завдання 8. Розв'язати рівняння

1. $19[x] + 97[x] = 1997$,
2. $[20x] + 31[x] = 2031$,
3. $[x-1] = \left[\frac{x+2}{2}\right]$,
4. $\left[\frac{1-3x}{2}\right] = x^2 - 2x$,
5. $[2x-1] - [3-x] = 2$,
6. $\left[\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right] = \sqrt{\left[x + \frac{1}{2}\right]}$.

2.2.4. Метод локалізації області допустимих значень рівняння

Локалізацією називаємо звуження множини, на якій можуть знаходитися розв'язки рівняння.

Таку локалізацію можна здійснити, використавши обмеженість функцій *f(x)* та *g(x)*у рівняннях виду $[f(x)] = g(x)$.

Якщо функція *f(x)* (або *g(x)*) обмежена, то права (або ліва) частина рівняння $[f(x)] = g(x)$ приймає обмежену кількість цілих значень. У цьому випадку розв'язок указаного рівняння зводиться до сукупності систем рівнянь

$$\begin{cases} [f(x)] = n_1, \\ g(x) = n_1; \end{cases} \quad \begin{cases} [f(x)] = n_2, \\ g(x) = n_2; \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} [f(x)] = n_k, \\ g(x) = n_k; \end{cases}$$

де $n_1, n_2, \dots n_k$ – область значень $[f(x)]$ та/або цілі числа з області значень *g(x)*.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $[\log_2 x] = \cos x$.

Розв'язання. Зауважимо, що функція $\cos x$ обмежена та приймає лише три цілих значення –1, 0 і 1. Перейдемо до сукупності систем

$$\begin{cases} [\log_2 x] = -1, \\ \cos x = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} [\log_2 x] = 0, \\ \cos x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} [\log_2 x] = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Єдиний розв'язок вихідного рівняння дає тільки друга система рівнянь.

Розв'язком рівняння $[\log_2 x] = 0$ є півінтервал [1; 2).

Розв'язком рівняння $\cos x = 0$ є множина точок $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in$ **Z.**

Перевіркою визначаємо, що $\left[\log_2 \frac{\pi}{2}\right] = 0$.

Перша і третя системи розв'язків не мають.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\left[3\sqrt{x - x^2}\right] = 2^{x-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання. Дослідимо область визначення та область значень функції, що стоїть під знаком антьє

$$D\left(3\sqrt{x - x^2}\right) = [0;\ 1],$$

$$E\left(3\sqrt{x - x^2}\right) = [0;\ \frac{3}{2}],$$

$$E_Z\left(3\sqrt{x - x^2}\right) = \{0;\ 1\}$$

(через E_Z позначено множину значень функції на множині цілих чисел). Отже, маємо таку сукупність систем менш складних рівнянь:

$$\begin{cases} \left[3\sqrt{x - x^2}\right] = 0, \\ 2^{x-\frac{1}{2}} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[3\sqrt{x - x^2}\right] = 1, \\ 2^{x-\frac{1}{2}} = 1. \end{cases}$$

Друге рівняння першої системи не має розв'язків, отже й перша система немає розв'язків. У другій системі спочатку розв'язуємо друге рівняння

$$2^{x-\frac{1}{2}} = 1, \qquad x - \frac{1}{2} = 0, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Підставляємо знайдене значення для перевірки в перше рівняння

$$\left[3\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1.$$

Відповідь: $x = \frac{1}{2}$.

Завдання 9. Розв'язати рівняння:

1. $\left[x^6 - 1\right] = -\frac{9(x-1)^2}{4}$,
2. $\left[\log_2 x\right] = \sin x - 1$,
3. $\left[\frac{2}{3}\sqrt{4x - x^2}\right] = x\sqrt{2}$,
4. $[\operatorname{tg} x] = 2\cos^2 x$.

Локалізацію області допустимих значень рівняння можна здійснити таким чином. Замінивши в рівнянні (1) цілу частину функції $g(x)$ її дробовою частиною, одержимо еквівалентне рівняння $g(x)-f(x)=\{g(x)\}$. Враховуючи, що $0\le\{g(x)\}<1$, розв'язки початкового рівняння слід шукати лише на множині

$$D=\{x,\ \text{де}\ x\in D(f)\cap D(g)\ \text{і}\ 0\le f(x)-g(x)<1\}.$$

Розглядаючи підмножини цієї множини, на яких $k\le\{g(x)\}<k+1$, приходимо до рівнянь $f(x)=k$, де k – деякі цілі числа.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $2+3[x]=4x$.

Розв'язання. Ураховуючи, що $[x]=x-\{x\}$, приходимо до рівняння $2-x=3\{x\}$. Оскільки $\{x\}\in[0;1)$, то $3\{x\}\in[0;3)$, тому й ліва частина рівняння має міститися в цьому проміжку. Розв'язуючи нерівність $0\le 2-x<3$, знаходимо, що $x\in(-1;2]$, а тоді $[x]=-1,0,1,2$. Підставляючи ці можливі значення $[x]$ в початкове рівняння, знайдемо відповідні значення x: $-0{,}25$; $0{,}5$; $1{,}25$; 2.

Відповідь: $x_1=-0{,}25$, $x_2=0{,}5$, $x_3=1{,}25$, $x_4=2$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $4[x]^2+10x+3=0$.

Розв'язання. Якщо переписати рівняння у вигляді $4[x]^2+3=-10x$, то можна побачити, що $x<0$, тому і $[x]<0$.

Якщо $[x]=-1$, то $7=-10x$, $x=-0{,}7$.

Якщо $[x]=-2$, то $19=-10x$, $x=-1{,}9$.

Якщо $[x]=-3$, то $x=-3{,}9$, але $[-3{,}9]=-4$. Маємо протиріччя.

Легко побачити, що у випадку $[x]\le-3$ рівняння розв'язків не має.

Відповідь: $x_1=-0{,}7$, $x_2=-1{,}9$.

Завдання 10. Розв'язати рівняння

1. $8x^2+15[x]+9=0$,
2. $3[x]^2+16[x]+3=0$,
3. $\sqrt{x-\{x\}}-\sqrt{x-[x]}=\dfrac{2}{3}$.

Література:

1. Вороной А. Н. Уравнение с переменной под знаком целой или дробной части // Математика в школе. 2002, № 10. С. 56–59.
2. Вороний О. М. Рівняння з цілою та дробовою частинами на учнівських математичних олімпіадах в Україні // Наукові записки. Випуск 74. Серія: Математичні науки. Кіровоград: РВВ КДПУ імені В. Винниченка. 2011. С. 25–37.
3. Егоров А. Целая и дробная части числа // Квант. 2002, № 5. С. 35–39.
4. Фирстова Н. И. Целая и дробная части числа в задачах // Математика в школе. 2002, № 10. С. 60–63.
5. Целая часть x и уравнения, содержащие целую часть x: методические указания / составители: Н. С. Новикова, Г. И. Готвянская. Днепропетровск: РИО ДГУ, 1978. 12 с.

Зміст

1. Функції ціла і дробова частина числа та їхні властивості 3

2. Методи розв’язання рівнянь, які містять $[x]$ та $\{x\}$ 5

2.1. Графічні методи 5

2.2. Аналітичні методи 8

2.2.1. Метод заміни змінної 8

2.2.2. Метод розкладання на множники 10

2.2.3. Метод зведення рівняння до системи з цілим параметром 10

2.2.4. Метод локалізації області допустимих значень рівняння 12

Література 15

Методичні вказівки
до розв’язання рівнянь,
які містять цілу частину x

Укладачі:

Біліченко Роман Олегович
Вакарчук Михайло Борисович
Конарева Світлана Вікторівна

Підписано до друку 2019 р. Формат 60×84/16. Папір друкарський
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 1. Наклад 30 пр. Зам. №